ELT – przykładowy egzamin 2017

1. Udowodnij. Dla dowolnych zbiorów A, B, C, jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $C \setminus (A \setminus B) \subseteq C \setminus A$.

2. Niech $A_{\epsilon,n} = \{x \in \mathbb{R} \colon 2n - \epsilon \leqslant x \leqslant 2n + 1 - \epsilon\}$, dla $\epsilon \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{\epsilon>0} A_{\epsilon,n}.$$

3. Wypisz używając tylko symboli: $\emptyset, \{\dots\}, (.,.)$ (para uporządkowana) następujący zbiór $\mathcal{P}(\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \times \{\mathcal{P}(\emptyset)\}$.

4. Sprawdź własności relacji (zwrotność, symetryczność, przechodniość, antysymetryczność) dla relacje $R = \{(n,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon (n-k) \bmod 2 = 1\}$.

5. Udowodnij, że jeśli relacja R jest przechodnia, to $R \circ R \subseteq R$.

6. Podaj przykład funkcji $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}[\{n\}]$ zawiera $(n \bmod 2)$ elementów (czyli 0 gdy n jest parzyste i 1 gdy n jest nieparzyste).

7. Podaj przykład częściowego porządku z dwoma elementami, które posiadają ograniczenie górne i dolne, ale nie posiadają kresu dolnego i kresu górnego.

8. Jaką moc ma zbiór funkcji z $\{0,1\}$ w $\mathbb{N}$ czyli $\mathbb{N}^{\{0,1\}}$?

Zadania dodatkowe.

1. Czy poniższa formuła jest tautologią, kontrtautologią, spełnialna:
$$(p \Rightarrow (q \vee r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r).$$

2. Udowodnij lub podaj kontrprzykład: jeśli $A \subseteq C$, to $A \setminus (B \setminus C) = A$.

3. Wyznacz zbiór $\mathcal{P}(\{1, 2\} \times \{1\}) \times \{\emptyset\}$. Możesz użyć symbolu pary uporządkowanej (x, y).

4. Udowodnij, że R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy R^{-1} jest przechodnia.

5. Udowodnij, że jeśli $R \circ R \subseteq R$, to R jest przechodnia.

6. Ile klas abstrakcji posiada relacja równoważności $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ taka, że $(a, b) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 = b^2$. Jaką liczność mają klasy abstrakcji?

7. Udowodnij, że złożenie dwóch funkcji, które są "na" też jest "na".

8. Udowodnij, że $f\colon A \to B$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $X \subseteq A$, $f^{-1}[f[X]] = X$.

9. Podaj przykład częściowego porządku, który posiada trzy łańcuchy maksymalne i dwa maksymalne antyłańcuchy.

10. Podaj przykład częściowego porządku, który posiada trzy elementy minimalne i dwa elementy maksymalne.

11. Jaką moc mają zbiory funkcji: $\{0\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\{0\}}$, $\{0, 1\}^{\{0,1\}}$?

12. Udowodnij: $\forall x(\bigcup \mathcal{P}(x) = x)$, gdzie $\mathcal{P}(x)$ to zbiór potęgowy x a $\bigcup x$ to suma uogólniona, czyli $\forall z(z \in \bigcup x \iff \exists w(w \in x \wedge z \in w))$.

Oczywiście, na egzaminie może pojawić dowolna tematyka, którą zajmowaliśmy się podczas ćwiczeń.