ELT – egzamin, 31.01.2017

Konrad Zdanowski

Za każde z zadań 1-6 można uzyskać 8 punktów. Zadanie 7 jest dodatkowe, oceniane na 4 punkty.

1. Udowodnij lub podaj kontrprzykład. Dla dowolnych zbiorów A, B, C, jeśli $C \subseteq A \cup B$, to $C \setminus A \subseteq B \setminus A$.

2. Niech $A_{\epsilon,n} = \{x \in \mathbb{R} \colon 3n - \epsilon \leqslant x < 3n + 1 + \epsilon\}$, dla $\epsilon \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{\epsilon>0} A_{\epsilon,n}$.

3. Niech $f \colon A \to B$. Pokaż, że jeśli f jest różnowartościowa, to dla dowolnych $X, Y \subseteq A$, $f[X \setminus Y] \subseteq f[X] \setminus f[Y]$.

4. Podaj przykład dwóch funkcji $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takich, że f nie jest "na" a złożenie $g \circ f$ jest "na". Uwaga, złożenie dwóch funkcji definiujemy jako $(g\circ f)(n) = g(f(n))$. Z warunków zadania wynika, że g musi być "na".

5. Niech $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N})$ będzie zbiorem skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N}) = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \colon \text{liczność } X \text{ skończona}\}$. Niech $B = \mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ będzie zbiorem skończonych, niepustych podzbiorów $\mathbb{N}$. Dla $X, Y \in B$, $X \sim Y$ wtw. gdy $\min(X) = \min(Y)$ i $\max(X) = \max(Y)$. Oczywiście, $\sim$ jest relacją równoważności na B. Opisz klasy abstrakcji relacji $\sim$ dla zbiorów $\{4, 7\}$ (1p) oraz $\{n\}$, dla $n \in \mathbb{N}$ (1p). Czy istnieje zbiór X, którego klasa abstrakcji ma 5 elementów? (2p) Pokaż, że każdy zbiór $X \in B$ jest równoważny, w sensie $\sim$, z pewnym zbiorem postaci o najwyżej dwóch elementach. (4p)

6. Podaj przykład częściowego porządku takiego, że: posiada element największy i trzy elementy minimalne, element największy jest kresem górnych wszystkich trzech elementów minimalnych lecz nie jest kresem górnym żadnych dwóch elementów minimalnych.

7. Czy założenie o różnowartościowości w zadaniu trzecim jest konieczne?