ELT – egzamin, 07.03.2017

Konrad Zdanowski

Za każde z zadań 1-5 można uzyskać 8 punktów. Zadanie 6 jest dodatkowe, oceniane na 3 punkty.

1. Zapisz zbiór $\mathcal{P}(\emptyset \cup \{\{\emptyset\}\}) \setminus \mathcal{P}(\{\emptyset\})$ używając tylko symboli: $\{, \}, \emptyset$ oraz przecinka.

2. Niech $A_{\epsilon,n} = \{x \in \mathbb{R} \colon 2n - \epsilon < x < 2n + \epsilon\}$, dla $\epsilon \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz $\bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\epsilon,n}$.

3. Niech $f \colon A \to B$. Pokaż, że jeśli f jest różnowartościowa, to dla dowolnych $X, Y \subseteq A$, $f[X] \cap f[Y] \subseteq f[X \cap Y]$.

4. Niech $B = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$. Niech $f \colon B \to \mathbb{N}$ będzie zdefiniowana jako $f(X) = \min(X)$. Czy f jest różnowartościowa (2p)? Czy f jest "na" (2p)? Ile wynosi $f(\{f(\{5\}), f(\{7\})\})$ (2p)? Ile wynosi $f(\{f(X)\})$ (2p)?

5. Niech $B = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$. Dla $X, Y \in B$, $X \sim Y$ wtw. gdy $\min(X) = \min(Y)$ oraz $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$.

   Oczywiście, $\sim$ jest relacją równoważności na B. Opisz klasy abstrakcji relacji $\sim$ dla zbiorów $\{4, 7\}$ (1p) oraz $\{n\}$, dla $n \in \mathbb{N}$ (1p). Czy istnieje zbiór X, którego klasa abstrakcji ma 5 elementów (2p)? Czy istnieje $X \in B$ taki, że $\mathrm{card}([X]_\sim) = \aleph_0$ (2p)? Jaka jest moc klasy abstrakcji $[\mathbb{N}]_\sim$ (2p)?

6. Czy dla każdego zbioru $X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, zbiór X jest postaci $A \times B$, dla pewnych $A, B \subseteq \mathbb{N}$.