

Programowanie w logice i funkcyjne (Prolog) (prezentacja niekompletna i przed korektą)

Konrad Zdanowski

Outline

- 1 Podstawy Prologu
 - Rezolucja w Prologu
 - Kontrola wykonywania rezolucji
 - Podstawy pracy z interpreterem
 - Struktury dynamiczne

Gdzie korzystać z Prologu?

- Sztuczna inteligencja
 - ▶ systemy eksperckie,
 - ▶ przetwarzanie języka,
 - ▶ obliczenia symboliczne,
 - ▶ wnioskowania,
 - ▶ ...
- Struktura bazy wiedzy (reguł) w Prologu jest zapisywana w pliku w sposób dość czytelny.
- Podstawowe zrozumienie programu w Prologu nie wymaga znajomości zaawansowanych technik.

Prolog – składnia

- Stałe

- ▶ atomy – zaczynają się od małej litery: zero, ala, slonce, jan_kowalski, ...
- ▶ dowolne ciągi znaków w apostrofach: 'Ala', 'jan kowalski', ...
- ▶ stałe liczbowe: 20, 1.23, -1, 4.32e4, 3.45e-2, ...

- Zmienne – zaczynają się dużą literą lub podkreśleniem: X, Y, Z, Ala, _X, _Y, ...

- Zmienna specjalna: podkreślenie `_`, używamy jej, kiedy nazwa zmiennej nie ma znaczenia (każde wystąpienie `_` to inna zmienna).

Termy w Prologu

- Term to

$Term ::= Zmienna | Atom | Liczba | Term_złożony.$

- Term_złożony to

$Term_złożony ::= Atom(Term, \dots, Term).$

- Termy złożone charakteryzuje ich nazwa (Atom) oraz liczba argumentów.
- Czasem można spotkać nazwę struktury zamiast termu złożonego.
- Ten sam atom może raz wystąpić w miejscu nazwy predykatu i w miejscu symbolu funkcyjnego, np.

`predfun(ala, predfun(ala, ala)).`

- Predykaty i symbole funkcyjne to atomy.
- Atomy specjalne, m. in.,
 - ▶ ':' – operator odpowiadający implikacji,
 - ▶ '?' – „symbol zachęty”,
 - ▶ ',' – przecinek.
- Wyrażenia zbudowane z tych atomów to także termy złożone.
 - ▶ [debug] ?- X=' :-' (ble(ala),ble(ala)).
X = (ble(ala):-ble(ala)).
 - ▶ [debug] ?- ':' (ble(ala), ',' (ble(ala), ble(ala))) = X.
X = (ble(ala):-ble(ala), ble(ala)).
 - ▶ Podobnie '=' to atom czyli
[debug] ?- '=' (X, ':' (f(zero), ',' (f(jeden), f(dwa)))).
X = (f(zero):-f(jeden), f(dwa)).

Równość

- $t = s$ oznacza próbę unifikacji termów t i s .
- Niestety, w celu polepszenia efektywności, Prolog nie sprawdza, czy unifikując X z t , term t nie zawiera wystąpień X .

- Np. Prolog unifikuje X i $f(X)$,

```
[debug] ?- X=f(X).  
X = f(X).
```

- To podejście odróżnia unifikację w Prologu od logiki.
- Aby uniknąć takiej sytuacji można użyć

```
[debug] ?- unify_with_occurs_check(X, f(X)).  
false.
```

- Zaleca się jednak pisanie programów w sposób, który wykluczy możliwość unifikacji X z $f(X)$.

Klauzule

- Fakty w bazie wiedzy Prologu wyrażamy za pomocą klauzul.
- Klauzula ma postać: Cel (głowa) :- Ciało.
- Cel to predykat (term).
- Ciało to predykaty pogrupowane przy pomocy:
 - ▶ ';' – koniunkcji,
 - ▶ ',' – alternatywy,
 - ▶ '->' – implikacji.
 - ▶ 'not' – negacją,
 - ▶ inne.
- Ciało może być puste. Wtedy `Głowa .` odpowiada `Głowa :- true.`
- Na początek zajmiemy się tylko koniunkcją, żeby zachować bliski związek z formułami Herbrandowskimi.

Klauzule

- Klauzule w bazie wiedzy reprezentują zależności logiczne pomiędzy predykatami.
- Należy jednak pamiętać, że predykaty i symbole funkcyjne w sensie logicznym w Prologu reprezentowane są przez termy.
- Ten sam term może wystąpić w obu rolach.

Przykład

- Niech baza wiedzy zawiera

```
predfun(ola,ola).
```

```
predfun(ala,predfun(ola,ola)):-predfun(ola,ola).
```

- Wtedy zapytanie `?-predfun(X,Y)` otrzyma dwie odpowiedzi:

```
X = Y, Y = ola ;
```

```
X = ala, Y = predfun(ola, ola).
```

- `predfun` wystąpił jako symbol funkcyjny i jako predykat.

Zapytania

- Do bazy wiedzy można kierować zapytania.
- Zapytanie ma (oczywiście) postać termu.
- Prolog stara się wynioskować term opierając się na wczytanej bazy wiedzy.
- Zapytanie możemy zadać w konsoli w postaci

```
?- zapytanie.
```

albo możemy wpisać je do bazy wiedzy w postaci

```
:-zapytanie.
```
- W tym drugim przypadku Prolog podczas wczytywania bazy stara się również wynioskować dany term.

Baza wiedzy

- Klauzule z bazy wiedzy zapisujemy do pliku z rozszerzeniem `.pl`
- Plik ten wczytujemy instrukcją `consult('plik.pl')`.
- Po zmianie pliku instrukcja `make.` wczyta zmienione pliki.
- Możemy użyć też `consult`.
- Podczas pracy z interpreterem możemy dodać klauzule do bazy wiedzy (`assert`, `asserta`, `assertz`) lub usunąć (`retract`).

Hello world!

- `print(t)` wypisuje term `t`.
- `?- write("Hello world!").`
Hello world!
`true.`
- `write(tekst)` możemy umieścić też w bazie wiedzy. Aby `print` zostało wykonane podczas wczytywania pliku, trzeba wpisać je jako cel do uzgodnienia (wynioskowania):

```
:-write(tekst).
```

Outline

- 1 Podstawy Prologu
 - Rezolucja w Prologu
 - Kontrola wykonywania rezolucji
 - Podstawy pracy z interpreterem
 - Struktury dynamiczne

Rezolucja w Prologu

- Niech teoria T reprezentuje bazę wiedzy.
- Niech $\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)$ to koniunkcja formuł atomowych będąca zapytaniem do Prologu.
- Jest to równoważne pytaniu czy

$$T \vdash \exists x \exists y \exists z (\varphi_1(x, y, z) \wedge \varphi_2(x, y, z)).$$

- Dowód rezolucyjny jest dowodem nie wprost więc próbujemy uzyskać sprzeczność z T i $\neg \exists x \exists y \exists z (\varphi_1(x, y, z) \wedge \varphi_2(x, y, z))$.
- Jest to równoważne dodaniu do T formuły $\forall x, y, z (\neg \varphi_1 \vee \neg \varphi_2)$.
- Prolog stara się wykonać SLD-rezolucje z T i jednej negatywnej klauzuli $\{\neg \varphi_1(x, y, z), \neg \varphi_2(x, y, z)\}$.

Rezolucja w Prologu

- Prolog stara się udowodnić przy pomocy rezolucji pytanie zadane do bazy wiedzy.
- Co więcej podczas wyводу rezolucyjnego konstruuje podstawienie, które wskaże świadków dla zmiennych występujących w pytaniu.
- Aby kontrolować Prolog trzeba znać sposób konstrukcji wyводу rezolucyjnego.
- Na kolejnym slajdzie przedstawię algorytm (w wersji rekurencyjnej) SLD rezolucji realizowanej w Prologu.

Rezolucja w Prologu – algorytm rekurencyjny

- Wejście: ciąg formuł atomowych $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_k(\bar{x})$ i podstawienie θ .
- Cel: wykazać sprzeczność klauzuli $\{\neg\varphi_1(\bar{x}), \dots, \neg\varphi_k(\bar{x})\}\theta$ z bazą wiedzy i podać wartościowanie, które konstruuje świadków.
 - 1 Jeśli ciąg formuł jest pusty to zwróć (**sukces**, θ).
 - 2 Weź pierwszą formułę z ciągu $\varphi_1(\bar{x})\theta$ i postaraj się ją zunifikować przy pomocy MGU z celem formuły z T (po urozłączeniu zmiennych tej formuły z $\varphi_1\theta$).
Formuły z T przeglądaj zgodnie z ich kolejnością w bazie wiedzy.
 - 3 Zaznacz miejsce p w T gdzie znalazłeś formułę $\psi : \neg\bar{\psi}$. taką, że dla MGU τ , $\varphi_1\theta\tau == \psi\tau$.
 - 4 Wywołaj się rekurencyjnie dla $\bar{\psi}, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ i podstawienia $\theta \circ \tau$.
 - 5 Jeśli wywołanie zwróci (**sukces**, τ) to zwróć (**sukces**, τ).
 - 6 Jeśli wywołanie zwróci **porażka** to szukaj innej unifikacji $\varphi_1\theta$ od miejsca p .
 - 7 Jeśli nie udało się zuunifikować $\varphi_1\theta$ to zwróć **porażka**.

Rezolucja w Prologu – własności algorytmu 1

- Przeglądamy formuły w kolejności ich występowania w bazie wiedzy.
- Kolejność formuł ma znaczenie, może spowodować wystąpienie nieskończonej pętli podczas konstruowania dowodu.
- Należy wpisywać najpierw przypadki „bazowe”, które są prawdziwe bezwarunkowo, mają postać: $p(t_1, \dots, t_k)$.

Rezolucja w Prologu – własności algorytmu 2

- Prolog unifikuje używając MGU.
- Wynika z tego, że nie wystarczy tylko raz próbować unifikacji z daną formułą w bazie wiedzy.
- Jeśli wywód przy pomocy MGU nie zakończy się sukcesem, to żaden inny unifikator nie osiągnie sukcesu (z własności MGU).
- Dlatego Prolog może przejść do szukania następczej formuły z bazy wiedzy w algorytmie.

Rezolucja w Prologu – własności algorytmu 3

- Po zwróceniu sukcesu Prolog zwraca też podstawienie, za zmienne z zapytania, dla którego może udowodnić zapytanie.
- Podstawienie to jest złożeniem podstawień, które Prolog wykonał podczas wywodu pustej klauzuli.
- Możemy kazać Prologowi wyszukać kolejne rozwiązanie (spacja, średnik).
- Prolog szuka wtedy kolejnej formuły w bazie wiedzy, z którą może zunifikować pierwszą formułę zapytania.

Kolejność klauzul ma znaczenie – przykład

- Rozważmy bazę wiedzy postaci

$p(a1a)$.

$p(X) :- \neg p(f(X))$.

- Zapytanie $?- p(X)$ zwróci odpowiedź $X=a1a$.
- Kolejne próby uzgodnienia zakończą się nieskończoną pętlą i próbami udowodnienia $p(f(X))$, $p(f(f(X)))$, ...
- Gdyby zmienić kolejność klauzul Prolog od razu wpadnie w nieskończoną pętlę i nie znajdzie odpowiedzi.

Definicje nowych predykatów

- Prolog pozwala na definicje predykatów.
- Definicja charakteryzuje predykat poprzez klauzule, które go opisują w bazie wiedzy.
- Przy pomocy tych klauzul Prolog stara się udowodnić predykat.
- Definiując klauzulą predykat $p(\dots)$ można użyć tego predykatu w ciele klauzuli.
- Trzeba dbać o to, żeby definicja taka nie spowodowała nieskończonej pętli.

Definicje nowych predykatów – przykład

- Niech $\text{edge}(X, Y)$ będzie relacją bycia krawędzią w drzewie (grafie bez cykli).
- Chcemy zdefiniować tranzytywne domknięcie relacji edge .
- Niech

$\text{edge}(a, b)$.

$\text{edge}(b, c)$.

$\text{edge}(c, d)$.

Definicje nowych predykatów – przykład

- $ts1_edge(X, Y) :- edge(X, Y) .$
 $ts1_edge(X, Y) :- edge(X, Z) , ts1_edge(Z, Y) .$

 $ts2_edge(X, Y) :- edge(X, Y) .$
 $ts2_edge(X, Y) :- ts2_edge(X, Z) , ts2_edge(Z, Y) .$

 $ts3_edge(X, Y) :- edge(X, Z) , ts3_edge(Z, Y) .$
 $ts3_edge(X, Y) :- edge(X, Y) .$

 $ts3_edge(X, Y) :- ts4_edge(X, Z) , ts4_edge(Z, Y) .$
 $ts4_edge(X, Y) :- edge(X, Y) .$
- **Która wersja jest lepsza?**

Definicje nowych predykatów – przykład

- $ts1_edge(X, Y) :- edge(X, Y) .$
 $ts1_edge(X, Y) :- edge(X, Z) , ts1_edge(Z, Y) .$

 $ts2_edge(X, Y) :- edge(X, Y) .$
 $ts2_edge(X, Y) :- ts2_edge(X, Z) , ts2_edge(Z, Y) .$
- Kiedy t należy do tranzytywnego domknięcia s , to $ts1_edge$ i $ts2_edge$ zachowują się podobnie.
- Różnica pojawia się gdy atomy nie są ze sobą w relacji:
 - ▶ $:-ts1_edge(a, a) .$ odnosi porażkę.
 - ▶ $:-ts2_edge(a, a) .$ wpada w nieskończoną pętlę.

Definicje nowych predykatów – przesłanianie nazw

- Definiując nowe predykaty możemy przysłonić nazwy predykatów z biblioteki Prologu.
- Dodajmy do bazy wiedzy `print('Ala ma kota')`.
- Teraz `?- print(X)` . uzgodni X ze stałą 'Ala ma kota' ale nic nie wydrukuje.

Równość czyli unifikacja

- W Prologu nie ma instrukcji przypisania.
- Równość, '=', ma w Prologu specjalne znaczenie.
- Uzgodnienie termu 't = s' powoduje unifikację termów.
- Oznacza to, że aktualne podstawienie Prologu zostaje rozszerzone o podstawienie θ takiego, że $t\theta$ i $s\theta$ to takie same termy.

Podwójna równość, '==', czyli równość termów

- Term $t=s$ odnosi sukces wtedy, gdy termy s i t są równe przy aktualnie skonstruowanym podstawieniu.
- Uzgodnienie $t=s$ rozszerza podstawienie.
- W przeciwieństwie do tego, $'=='$ nie powoduje zmiany podstawienia.

'=' i '==' – przykład

- :- $X == f(Y)$. kończy się niepowodzeniem.
- :- $X = f(Y)$. odnosi sukces.
- :- $X = f(Y), X == f(Y)$. odnosi sukces.

'=' i '==' – skok do negacji

- `not (term)` odnosi sukces kiedy próba wykazania `term` się nie powiedzie (negacja w Prologu).
- `:- not (X==f (Y)) .` odnosi sukces.
- `:- not (X=f (Y)) .` odnosi porażkę.
- `:- not (not (X=f (Y))) .` odnosi sukces.
- `:- not (not (X=f (Y))), X==f (Y) .` odnosi porażkę (dlaczego?).

Outline

- 1 Podstawy Prologu
 - Rezolucja w Prologu
 - **Kontrola wykonywania rezolucji**
 - Podstawy pracy z interpreterem
 - Struktury dynamiczne

Kontrola wykonywania rezolucji

- Podczas wykonywania programu Prolog może wpaść w nieskończoną pętlę.
- Nawet jeśli Prolog nie wpadnie w nieskończoną pętlę często może wykonywać niepotrzebnie obliczenia, które nie mogą zakończyć się sukcesem.
- Prolog może niepotrzebnie szukać rozwiązania, o którym można z góry powiedzieć, że nie istnieje.
- Aby zoptymalizować obliczenia Prologu, uniknąć nieskończonych pętli, niezbędna jest kontrola nad wykonywanym wnioskowaniem.

- Kolejność wyboru klauzul do unifikacji – zgodnie z opisem algorytmu.
- Nawracanie – zgodnie z opisem algorytmu.
- fail – wymuszona porażka lub wymuszenie nawrotu.
- cut (!) – odcięcie.

fail

- fail – ten cen nigdy nie kończy się sukcesem.
- Można go użyć do wymuszenia nawracania.
- Można go użyć do stworzenia pętli.

Pętla może przebiegać po termach

- ```
osoba(ala).
osoba(ola).
osoba(alek).
osoba(olek).
```

```
loop:- osoba(X), write(X),nl, fail.
loop:-true.
```

- ```
?- loop.  
ala  
ola  
alek  
olek  
true.
```

- Wbudowane konstrukcje pozwalające na wykonanie pętli numerycznej:

- ▶ `between(Low, High, Value)`

- Przykład.

```
?- between(3, 5, X), write(X), nl, fail.
```

```
3
```

```
4
```

```
5
```

```
false.
```

- Później zobaczymy jak skonstruować pętlę ze zmienną numeryczną bez `between`; lub jak zdefiniować `between`.

Odcięcie

- Odcięcie, !, zawsze odnosi sukces, ale podczas uzgadniania celu odnosi sukces tylko raz i Prolog już nie próbuje uzgodnić inaczej celów, które wystąpiły przed odcięciem.
- `cel(X) :- a(X), b(X), !, c(X), d(X).`
- Co więcej, po dotarciu do odcięcia, Prolog nie będzie próbował uzgodnić `cel(X)` korzystając z innych reguł zawierających `cel(X)` jako głowę reguły.
- Gdyby Prolog nie doszedł do odcięcia, mógłby skorzystać z innych reguł dla uzgodnienia `cel(X)`.

Odcięcie – dlaczego używamy

- Mówi Prologowi, że wybrał już właściwą (może jedyną) regułę do uzgodnienia celu.
Podstawienie obliczone do tego momentu przez Prolog nie będzie zmieniane. Korzystamy z tego, gdy nie chcemy, żeby Prolog próbował uzgadniać cel w inny sposób, nawet jeśli by mu się to udało.
- Mówi Prologowi, że nie uda się już uzgodnić celu w inny sposób.
- Może wymusić natychmiastowe zakończenie prób uzgodnienia celu w konfiguracji `cel :- a, b, !, fail.`

Odciecie – przykład

- osoba(ala).

osoba(ola).

osoba(alek).

osoba(olek).

zwierze(ara).

zwierze(pola).

odciecie(X,Y):-osoba(X), X=Y.

odciecie(X,Y):-osoba(X),!, zwierze(Y).

odciecie(X,Y):-zwierze(X), osoba(Y).

- ?-odciecie(X,Y). uzgodni wszystkie pary z pierwszej klauzuli, uzgodni pary ala, ara oraz ala, pola.
- Proszę zwrócić uwagę na kolejność wypisywania stałych.

Odciecie – przykład

- osoba(ala) .
osoba(ola) .
osoba(alek) .
osoba(olek) .
zwierze(ara) .
zwierze(pola) .
odciecie(X,Y):-osoba(X), X=Y.
odciecie(X,Y):-osoba(X),!, zwierze(Y) .
odciecie(X,Y):-zwierze(X),osoba(Y) .
celnadrzedny(X,Y):-odciecie(X,Y) .
celnadrzedny(X,Y):-zwierze(X),X=Y.
- ?-celnadrzedny(X,Y) .
uzgodni wszystkie pary (ala,ala), ..., (olek,olek),
uzgodni (ala,ara), (ala,pola)
oraz pary (ara,ara), (pola,pola).

Odcięcie – przykład

- `suma(N,X)` – X jest sumą liczb od 1 do N
- `suma(1,1) :- !.`
`suma(N,X) :- N1 is N - 1, suma(N1,Y), X is N + Y.`
- Bez odcięcia Prolog mógłby próbować uzgodnić `suma(1,X)` inaczej niż przy pomocy pierwszej klauzuli.

Odcięcie – przykład

- `suma(1,1) :- !.`
`suma(N,X) :- N1 is N - 1, suma(N1,Y), X is N + Y.`

`suma_bez_odcięcia(1,1).`
`suma_bez_odcięcia(N,X) :- N1 is N-1,`
`suma_bez_odcięcia(N1,Y),`
`X is N+Y.`
- `?- suma(1,X), fail.` kończy się porażką.
- `?-suma_bez_odcięcia(1,X), fail.` wpada w nieskończoną pętlę.

Odcięcie – przykład

- Odcięcie zmienia ilość dostępnych wyborów.

- `ilu_ro(adam,N):- !, N=0.`

- `ilu_ro(ewa,N):- !, N=0.`

- `ilu_ro(X,2).`

```
?- ilu_ro(X,Y).
```

```
X = adam,
```

```
Y = 0.
```

Odcięcie sprawia, że Prolog nie znajduje innych podstawień.

- `?- ilu_ro(X,2).`

- `false.`

Odcięcie sprawia, że po próbie uzgodnienia z pierwszą klauzulą Prolog nie próbuje uzgodnień z innymi klauzulami.

Odcięcie a predykat 'not'

- Predykat 'not(P)' ($\backslash+$ P) odnosi sukces, gdy uzgodnienie P się nie powiedzie.
- Pozwala to na zdefiniowanie odcięcia.
- Zamiast

```
cel :- a, !, b.  
cel :- c.
```

możemy napisać

```
cel :- a, b.  
cel :- \+ a, c.
```

- Druga wersja jest „bardziej logiczna” ale w pierwszej klauzuli *a* może być uzgadniane wiele razy.
- W drugiej wersji cel *a* jest uzgadniany również w drugiej klauzuli, co zmniejsza efektywność.
- `a(X) :- ground(X), zwierze(X).`
`a(X) :- \+ground(X), osoba(X).`

Powtórzyc poprzedni przykład z omowieniem tego, jak Prolog wybiera termy i dla jakich X $a(X)$ sie powiedzie.

Outline

- 1 Podstawy Prologu
 - Rezolucja w Prologu
 - Kontrola wykonywania rezolucji
 - **Podstawy pracy z interpreterem**
 - Struktury dynamiczne

- Wczytywanie bazy wiedzy `consult (plik) .`
- Śledzenie (`trace`, `gtrace`, `notrace`).
- Ustawianie punktów śledzenia (`spy`).
- Przerwanie wykonywania programu: `Ctrl+C`.

Outline

- 1 Podstawy Prologu
 - Rezolucja w Prologu
 - Kontrola wykonywania rezolucji
 - Podstawy pracy z interpreterem
 - **Struktury dynamiczne**

Listy

- Pusta lista to [].
- Listę dzielimy na głowę i ogon i zapisujemy [*Głowa*|*Ogon*].
- Listę możemy też zapisać [*a, b, c*|*Ogon*] lub [*a, b, c*] = [*a, b, c*|[]].

- Lista jest strukturą dynamiczną.
- Predykaty pisane dla list muszą uwzględniać rekurencyjną strukturę listy.
- Sprawdzenie czy coś jest elementem listy

```
member(X, [X|_]) .
```

```
member(X, [_|O]) :-member(X, O) .
```

- Prawidłowe użycia

```
:-member(a, [c,b,a]) .
```

```
:-member(X, [c,b,a]) .
```

```
:-member(a, X) .
```

- Co by się zmieniło w `:-member(a, X)` . gdyby zastosować odcięcie w pierwszej klauzuli definicji czyli
 - ▶ `:-member(X, [X|_]) :-!` .

Struktury i struktury dynamiczne

- Struktura może być reprezentowana termem.
- Np. `moja_struktura('Adam', 'Abacki', 1.82, 92)` reprezentuje Adama Abackiego o wzroście 1.82m i wadze 92kg.
- Drzewa w prologu reprezentujemy przez termy zagnieżdżone.
 - ▶ Węzeł drzewa to `node(Wartosc, LewePodrzewo, PrawePodrzewo)`.
 - ▶ Przykład drzewa `node(2, node(1, null, null), node(3, null, null))`.
 - ▶ W jednym drzewie możemy przechowywać wartości „różnych typów”, np. `node(2, node(1.3, null, null), node(procenator, null, null))`.

Drzewo BST

```
insertBSTaux(N, null, treeBST(N, null, null)) :- !.
insertBSTaux(N, treeBST(N, TLeft, TRight),
              treeBST(N, TLeft, TRight)) :- !.
insertBSTaux(N, treeBST(M, TLeft1, TRight1),
              treeBST(M, TLeft2, TRight2)) :-
    N < M,
    TRight1 = TRight2,
    insertBSTaux(N, TLeft1, TLeft2).
insertBSTaux(N, treeBST(M, TLeft1, TRight1),
              treeBST(M, TLeft2, TRight2)) :-
    N > M,
    TLeft1 = TLeft2,
    insertBSTaux(N, TRight1, TRight2).

insertBST(N, T1, T2) :- number(N), insertBSTaux(N, T1, T2).
```

Drzewo BST

```
?- insertBST(4,null,T1), insertBST(5,T1,T2),  
   insertBST(1,T2,T3), insertBST(8,T3,T4).
```

```
T1 = treeBST(4, null, null),
```

```
T2 = treeBST(4, null, treeBST(5, null, null)),
```

```
T3 = treeBST(4, treeBST(1, null, null),  
            treeBST(5, null, null)),
```

```
T4 = treeBST(4, treeBST(1, null, null),  
            treeBST(5, null, treeBST(8, null, null)))
```

Koniec