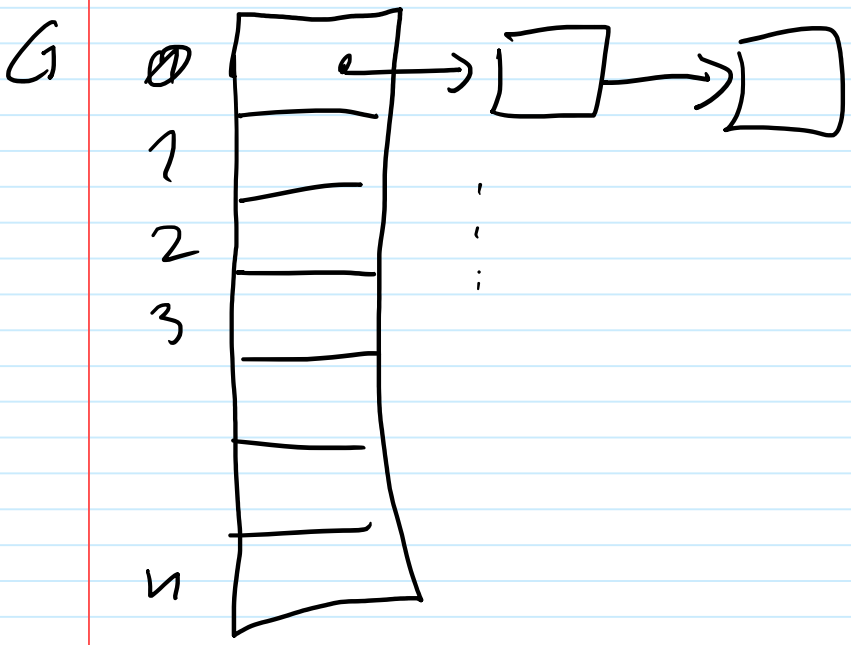
ASD 2022.05.26

Grafy, Sortowanie topologiczne



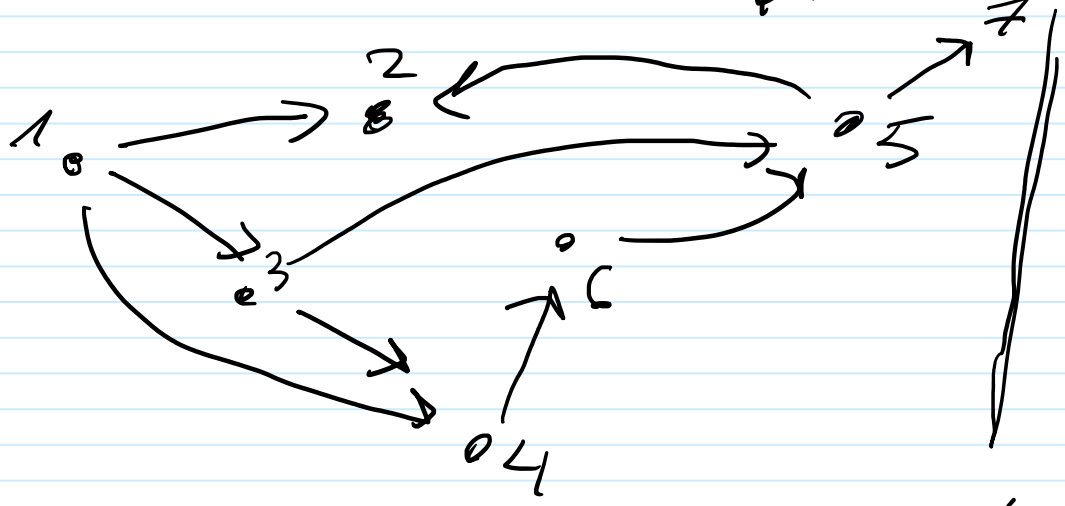
G[i] - lista krawędzi wychodzących z wierzchołka i.

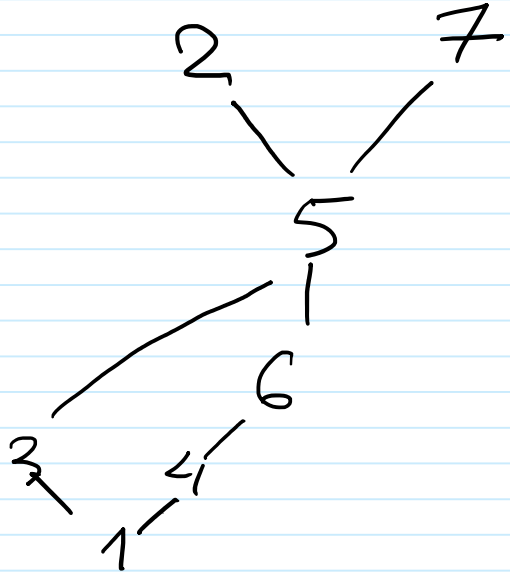
Def

Graf jest DAG (directed acyclic graph) skierowany, bez cykli

Kiedy jest skierowany i nie zawiera cykli.

Niech G będzie DAG.





$a \leq b$ tzn $a = b$ lub istnieje ścieżka w G z a do b

Problem

Dane: G - skierowany DAG

Wy: liniowy porządek zgodny z porządkiem częściowym zdefiniowanym standardowo na G

Fakt

Każdy skierowany częściowy porządek rozszerza się do porządku liniowego.

Def

Niech $P=(U, \leq_P)$ – porządek częściowy.

$L=(U, \leq_L)$ – porządek liniowy

P rozszerza się do L, jeśli

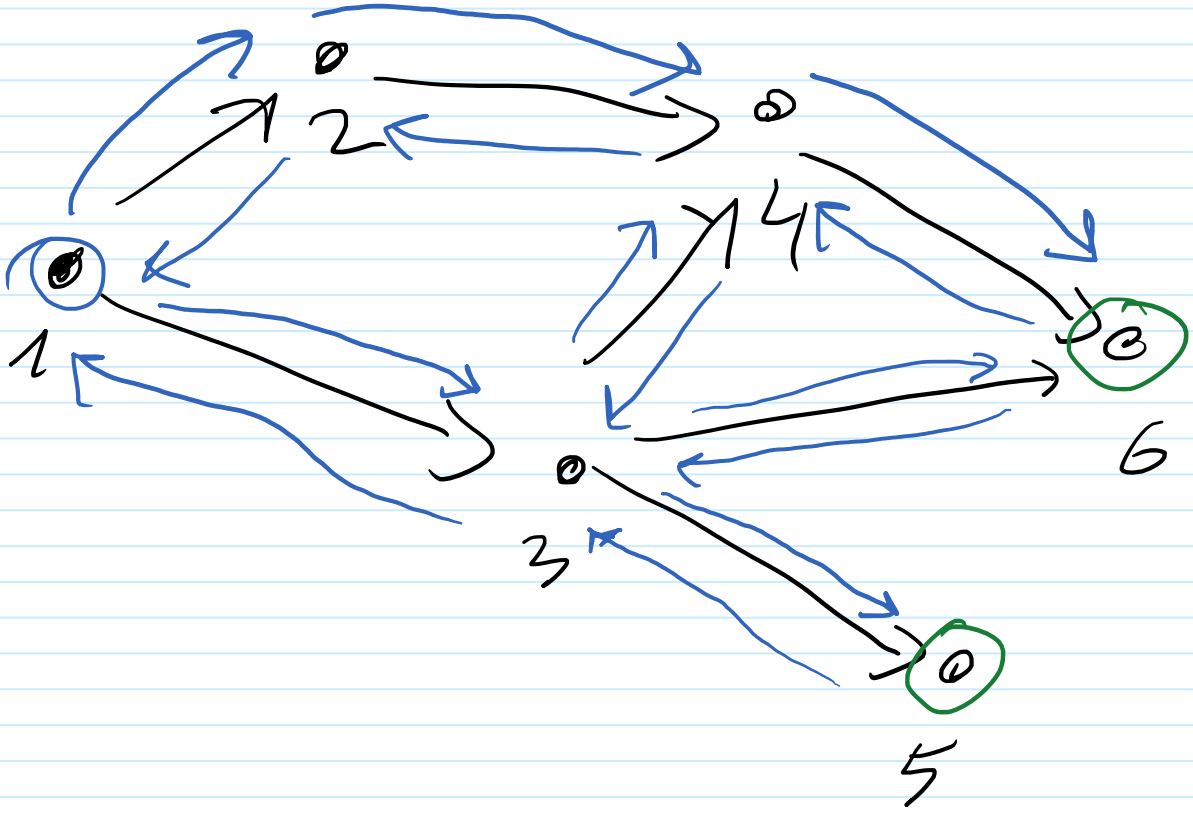
$$\forall a, b \in U \; [a \leq b \rightarrow a \leq_L b]$$

$\leq_P \subseteq \leq_L$.

Algorytm

- wykonuj stamy przeszukiwanie grafu dfs
- z jednej strony dfs odwiedza wszystkie wierzchołki osiągalne z danego wierzchołka
- przechodzi przez wszystkie krawędzie
- wykrywa cykle

Strategia działania algorytmu



1, 3, 5, 2, 4, 6

```
% Sortujemy topologicznie
% graf G o wierzchołach 0,..., size-1,

% Algorytm oparty jest o przeszukiwanie dfs

List topSort;

TopologicalSort(Graph G, int size){
   topSort=empty;
   String status[0,...,size]={"waiting", ...., "waiting"};
   for(i=0;i<size;i++)
       if(status[i]="waiting")
          visit(i)
}

visit(int i){
  if(status[i]="on_list") return;
  if(status[i]="in_processing") return Error(Cycle_Detected);
  status[i]="in_processing";
  Node *ptr=G[i].edges;
  while(ptr!=NULL){
    visit(ptr->end);
    ptr=ptr->next;
  }
  topSort=(i)*topSort; //add i to the head of topSort
  status[i]="on_list";
}
```

Na tej liście będą wierzchołki w konstruowanym porządku liniowym.

status:

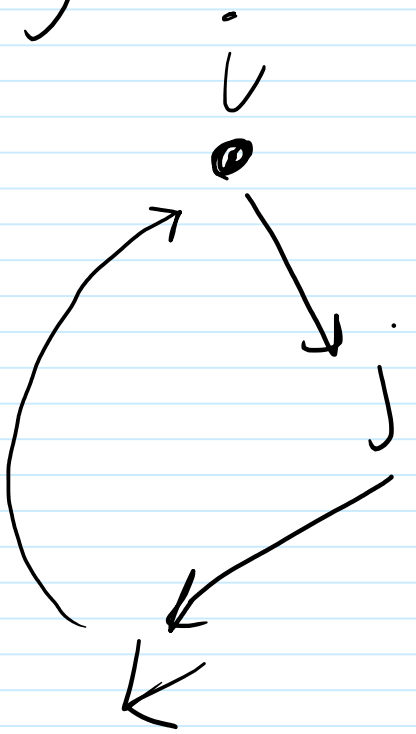
waiting - nic się nie działo z wierzchołkiem.

in-processing - przetwarzamy wierzchołek, funkcja visit() działa

on_list - wierzchołek jest już na liście topSort.

w tym momencie wszystkie wierzchołki osiągalne z i są na liście topSort.

in_processing



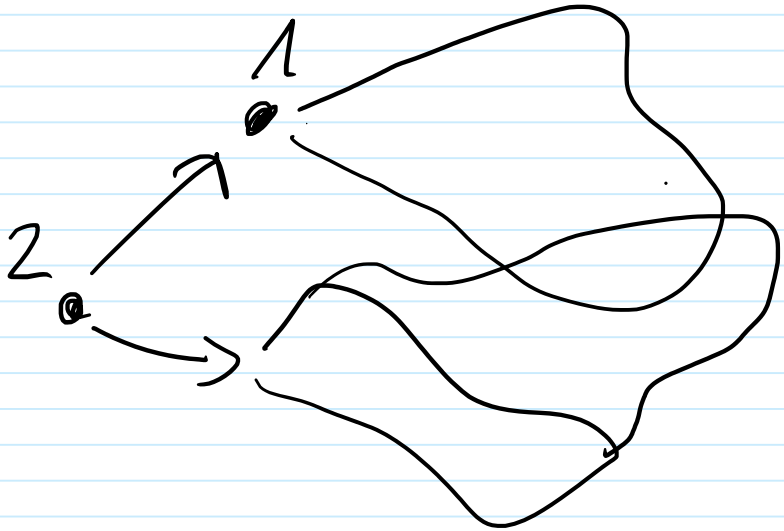
visit(i)

visit(j)

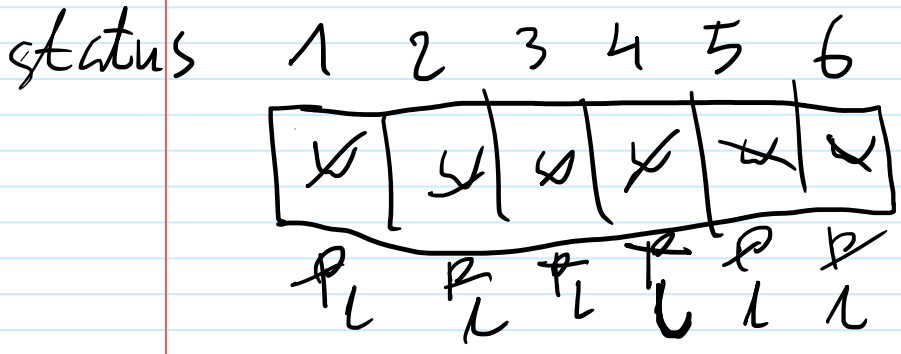
visit(k)

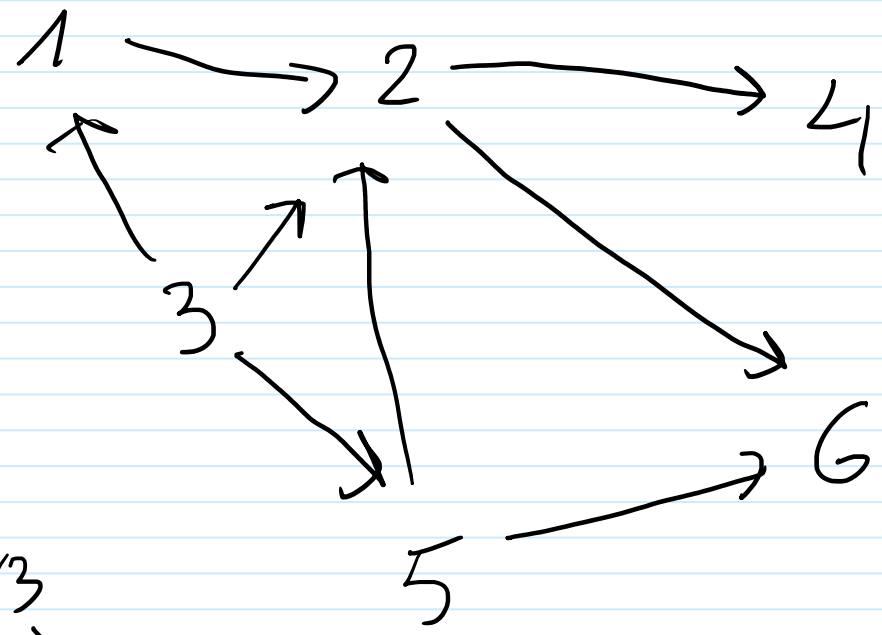
visit(i)

Wykryliśmy cykl, graf nie jest DAG-iem.


1
2

W - waiting
P - in processing
L - on list





visit(1)

visit(2)

visit(4) visit(6)

visit(3

visit(2) visit(5)

visit(2) visit(6)

top Sort: 3, 5, 1, 2, 6, 4

W tamtej algorytmie wykrywającym z wtamtej dfs.

- Jeśli w grafie jest cykl, to zwracamy błąd (bo dfs wykrył cykl).
- Kończymy funkcję visit(i) tylko gdy wszystkie wierzchołki osiągalne z i są już na liście wynikowej topSort.

W takim razie możemy dołożyć i na początek tej listy.

Minimalne drzewo rozpinające w grafie (algorytm Prima)

Def

Graf z wagami krawędzi to graf $G = (V, E, w)$, gdzie (V, E) to graf.

$$w : E \to \mathbb{N}^{>0}$$

$w(e)$ - waga krawędzi e.

Chcemy: $w(e)$ możemy policzyć w czasie stałym.

Def

Niech $G = (V, E)$ graf nieskierowany, spójny, skończony.

T jest drzewem rozpinającym G jeśli:

$T = (V, F)$,

T jest spójny

T jest drzewem (to znaczy, że T ma minimalną ilość krawędzi równą $|V| - 1$).

~~Twierdzenie~~

Def

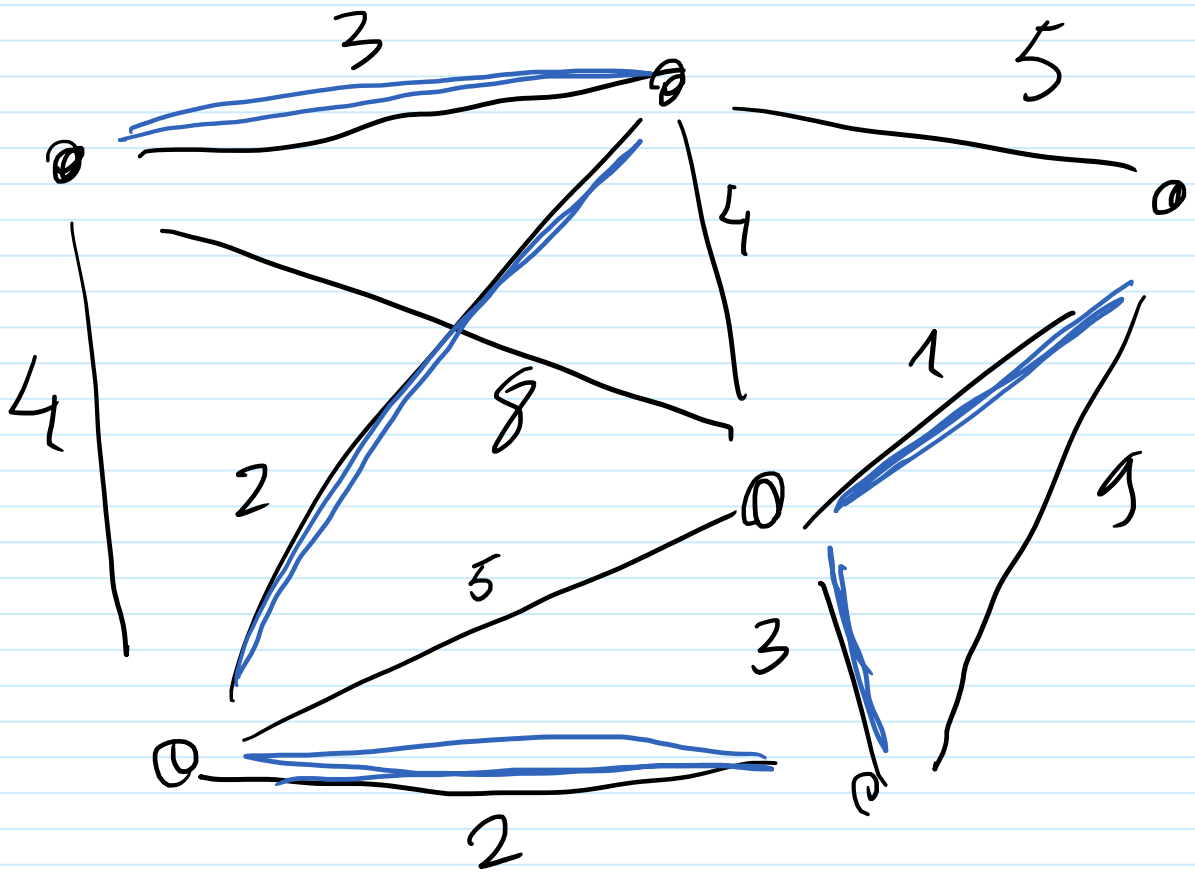
Niech $G = (V, E, w)$ – graf nieskierowany, spójny z wagami.

$T = (V, F)$ jest minimalnym drzewem rozpinającym G jeśli:

- T jest drzewem rozpinającym G
- suma wag krawędzi w T jest minimalna wśród wszystkich drzew rozpinających G.

$\sum_{e \in F} w(e)$ – minimalne.

$T = (V, F)$



$$\sum_{e \in F} w(e) = 11.$$

Fakt

Niech $G=(V,E,w)$ - spójny, nieskierowany graf z wagami,

Niech $T=(W,F)$ - drzewo, t.j. $W \subseteq V$

$F \subseteq E$

czyli T jest podgrafem G

T jest poddrzewem pewnego minimalnego drzewa rozpinającego G.

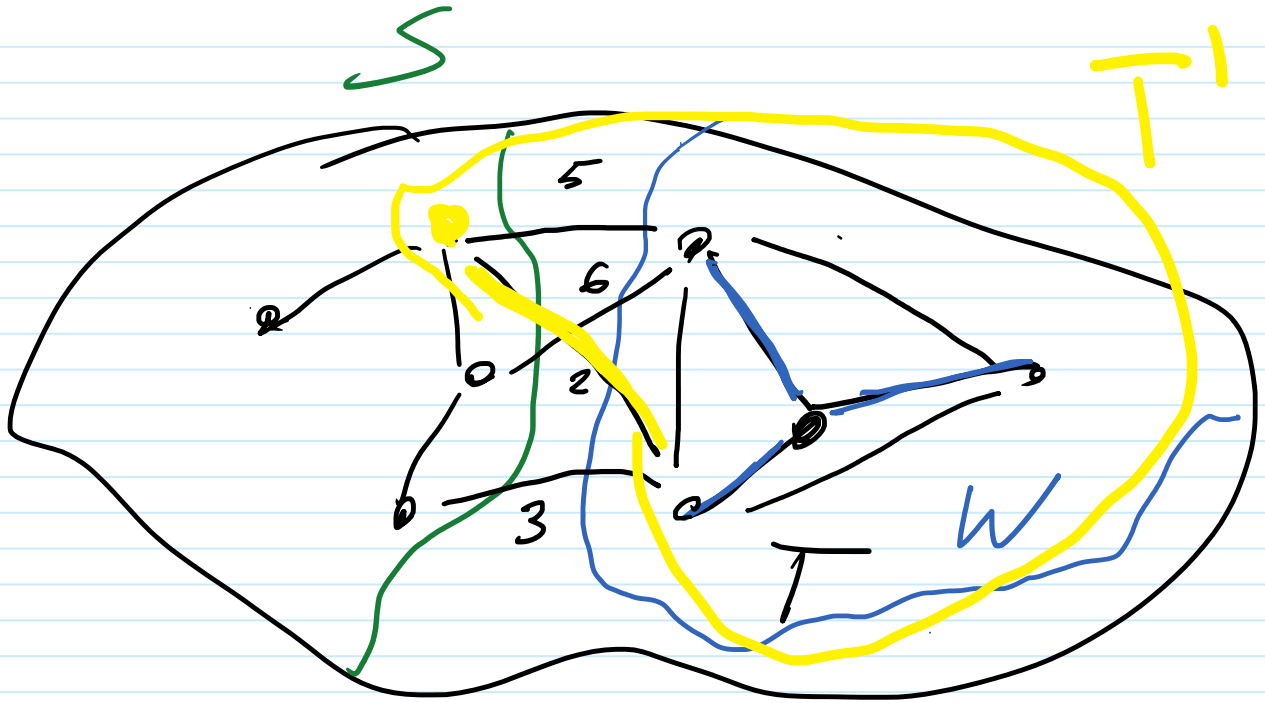
Niech

$$S = V \setminus W \neq \emptyset$$

$$H = (W \times S) \cap E = \{(a,b) : a \in W, b \in S, (a,b) \in E\}$$

e - krawędź w H o minimalnej wadze $e=(a,b), b \in S$

Tezа: $T' = (W \cup \{b\}, F \cup \{e\})$ - poddrzewo pewnego minimalnego drzewa rozpinającego G



Algorytm Prima działa tak, że zaczyna od drzewa pustego, i dokłada kolejne krawędzie i wierzchołki do rozwiązania zgodnie z opisaną w Fakcie strategią.

Algorytm Prima rozwiązujący problem minimal spanning tree (MST).

Dane: graf G - w postaci tablicy list
funkcja wag $w: E \to \mathbb{N}$ inicjalizacji
$G = (V, E, w)$

Struktury pomocnicze

Umieścimy wierzchołki, które jeszcze nie należą do częściowego rozwiązania T w kolejce priorytetowej Q.

To będzie min-kolejka -
czyli na początku są elementy
o mniejszym priorytecie.

Jeśli $T = (W, F)$ to nasze częściowe rozwiązanie
w kolejce mamy wierzchołki $V \setminus W$
dla $v \in V \setminus W$

$$\text{priorytet}(v) = \min\{w(e) : e \in E \text{ i } \exists x \in W \; e = (v, x)\} \cup \{+\infty\}$$

Potrzebujemy pary tablic

Niech $G=(V,E)$

i $V=\{0,\ldots,n-1\}$

int dist[n]; - odległości wierzchołka od skonstruowanego drzewa.

int father[n]; :

father[i] = -2 - wierzchołek i nie należy do naszego rozwiązania częściowego.

father[i] = -1 - i jest korzeniem drzewa, które konstruujemy

father[i] $\in\{0,\ldots,n-1\}$ - i został dołączony do drzewa oraz

oraz
został dołączony krawędź
$e = (i, father[i])$.

Bool inQueue[u]:

inQueue[i] == True - wierzchołek
jest w kolejce Q, czyli nie
został jeszcze dodany do MST.

MST-Prim (Edge * graph, int n, int root) {

n - rozmiar grafu o wierzchołkach 0, ..., n-1

root - korzeń drzewa, które obliczamy

$\forall v \in V$ dist[v] = +∞

dist[root] = 0;

$\forall v \in V$ father[v] = -2;

father[root] = -1;

Q = V; // Jeśli implementujemy Q w taki sposób, że zawiera ona

przez siebie to

$Q = [root, 0, 1, \ldots, root-1, root+1, \ldots, n-1]$

$\forall v \in V$ inQueue[v] = True;

```
while (!Q.empty()) {
    int a = Q.dequeue(); // inQueue[a] = False
    dla wszystkich krawędzi postaci (a, b), gdzie
                        b jest w kolejce Q:
        uaktualniamy ich dist[b] i father[b].
    Edge * ptr = graph[a];
    while (ptr != NULL) {
        b = ptr -> end;
        if ( inQueue[b] == True && dist[b] > w(a,b) ) {
            dist[b] = w(a,b);
            father[b] = a;
            Q.upheap(b); <- niekoniecznie
        }
        ptr = ptr -> next;
    }
}
```

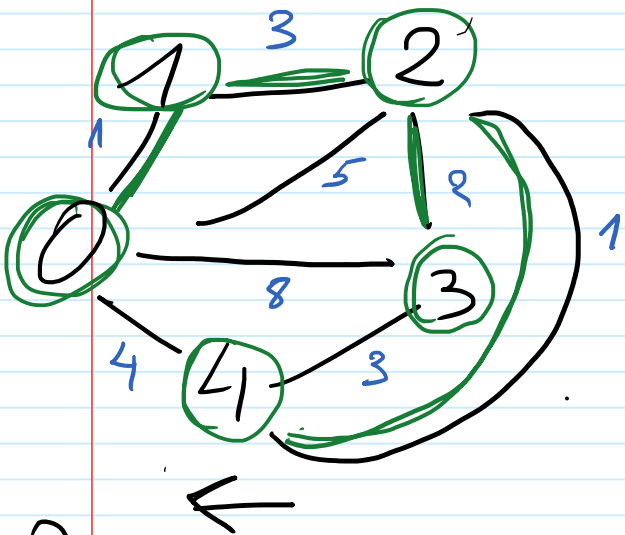
Aaaaby szybko znaleźć wierzchołek b w kolejce Q (w tablicy, która ją implementuje)

możemy użyć dodatkowej struktury np. tablicy

int toQueue[n]

toQueue[i] = miejsce wierzchołka i w Q.

Przykład korzeń MST to 0.



dist =

0	1	2	3	4
0	1	5	8	4
		3	2	1

father = [-1, 0, 0, 0, 0]
[-1, 0, 1, 2, 2]

Q = 0 1 2 3 4

a = 0

Q = 4 1 2 3

1 4 2 3

1 3 2 4

1 4 2 3

T = {0}

a = 1

Q = 4 3 2

Q = 2 3 4

T = {0, 1}, {(0, 1)}

a = 2

Q = 4 3

Q = 3 4

Q = 4 3

T = {0, 1, 2}, {(0, 1), (1, 2)}

a = 4

Q = 3

T = {0, 1, 2, 4}, {(0, 1), (1, 2), (2, 4)}

a = 3

Q = ∅

T = {0, 1, 2, 3, 4}, {(0, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4)}

Minimalne drzewo rozpinające to

$T = (\{0, \ldots, 4\}, \{(i, father[i]) : 0 \leq i \leq 4\})$

Jaka jest złożoność tego algorytmu?

Inicjalizacja struktur pomocniczych to $O(|V|)$.

Wewnętrzna pętla "while (ptr != NULL)" wykona się tyle razy, ile jest krawędzi incydentnych z i, czyli $deg(i)$.

Koszt jej pojedynczego wykonania to $O(\log(|V|))$, bo to jest koszt upheap.

↳ Samie mamy koszt

$$O(|E| \cdot \log_2(|V|))$$

Przedtem

koszt pętli "while(!Q.empty())"

to koszt zdjęcia wierzchołka z kolejki

czyli $O(\log_2(|V|))$.

↳ samie $O(|V| \cdot \log_2(|V|))$

W sumie

$$O(|V|) + O(|E| \cdot \log_2(|V|)) + O(|V| \cdot \log_2(|V|))$$

preprocessing — wewnętrzna pętla — pętla zewnętrzna minus pętla wewnętrzna

$$= O(|E| \cdot \log_2(|V|))$$

bo $|E| \geq |V| - 1$,

bo graf jest spójny.