Naturalna dedukcja – zestaw reguł

Konrad Zdanowski
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego, Warszawa

listopad, 2021

1 Reguły dowodów w systemie dedukcji naturalnej

Zbiór reguł podzielony jest na reguły dostępne w rachunku zdań i reguły dla kwantyfikatorów. Wykorzystane hipotezy, po których wprowadzeniu zakończyliśmy odpowiadające im części dowodu oznaczamy jako wykorzystane (np. przez v). Przesłanki jeszcze nie wykorzystane w dowodzie nazywamy *aktywnymi*. Poprawny, skończony dowód nie może posiadać aktywnych przesłanek. Wprowadzone w dowodzie aksjomaty są od początku uznane za wykorzystane.

Prezentowany system nie jest minimalny. Reguła eliminacji podwójnej negacji mogłaby zostać opuszczona bez utraty siły dowodowej.

1.1 Reguły rachunku zdań

- Powtórzenie formuły:

$$\frac{A}{A}$$

- Wprowadzenie koniunkcji (I$\wedge$):

$$\frac{A_1 \quad A_2}{A_1 \wedge A_2}.$$

- Eliminacja koniunkcji (E$\wedge$):

$$\frac{A_1 \wedge A_2}{A_i},$$

  dla $i \in \{1, 2\}$.

- Wprowadzenie implikacji (I$\rightarrow$):

$$\begin{array}{l|ll} & A & \quad\quad \text{H v} \\ \hline & \vdots & \\ & B & \end{array}$$
$$A \rightarrow B.$$

- Eliminacja implikacji czyli modus ponens (E$\rightarrow$):

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}.$$

- Wprowadzanie alternatywy (I$\vee$):

$$\frac{A_i}{A_1 \vee A_2},$$

dla $i \in \{1, 2\}$.

- Eliminacja alternatywy (E$\vee$):

$$A \vee B$$
$$\begin{array}{l|ll} & A & \quad\quad \text{H v} \\ \hline & \vdots & \\ & C & \end{array}$$
$$\begin{array}{l|ll} & B & \quad\quad \text{H v} \\ \hline & \vdots & \\ & C & \end{array}$$
$$C$$

- Przez $\perp$ oznaczamy sprzeczność. Reguły dla $\perp$ (sprzeczności):
  Ze sprzeczności wynika wszystko (E$\perp$, ex falso quadlibet):

$$\frac{\perp}{A}.$$

- Wprowadzanie sprzeczności (I$\perp$):

$$\frac{A \quad \neg A}{\perp}.$$

- W logice klasycznej, w której będziemy pracować, negacja podlega jeszcze następującym prawom (wystarczyłoby jedno z nich, żeby wyprowadzić pozostałe):

  – Eliminacja podwójnej negacji (E$\neg\neg$):

  $$\frac{\neg\neg A}{A}.$$

  –

  – Reguła dowodu nie wprost:

  $$\begin{array}{|ll} \neg A & \qquad \text{H v} \\ \hline \vdots & \\ B & \\ \vdots & \\ \neg B & \end{array}$$
  $$A$$

  – Prawo wyłączonego środka. Możemy dodać je jako aksjomat $A \vee \neg A$ lub jako regułę:

  $$\begin{array}{|ll} A & \qquad \text{H v} \\ \hline \vdots & \\ B & \end{array}$$
  $$\begin{array}{|ll} \neg A & \qquad \text{H v} \\ \hline \vdots & \\ B & \end{array}$$
  $$B$$

- Negację w naturalnej dedukcji możemy traktować jako symbol pierwotny ale możemy także zdefiniować negację $\neg A$ jako $A \to \bot$. System taki ma mniej reguł, gdyż zamiast reguł opisujących zachowanie negacji wykorzystujemy reguły dotyczące implikacji oraz $\bot$. Wtedy reguła wprowadzania sprzeczności wynika z reguły modus ponens. Jeśli jednak chcemy mieć siłę logiki klasycznej, to musimy zachować odpowiednik reguły opisującej prawo wyłączonego środka, lub eliminację podwójnej negacji, lub prawo Pierce'a.

1.2 Reguły dla kwantyfikatorów

W regułach poniżej symbol t jest dowolnym termem, $a, b, c, \ldots$ są to stałe. Kiedy piszemy, że a jest nową stałą to oznacza, że a nie pojawiło się wcześniej w dowodzie. Mówimy, że stała a jest *dobra* jeśli nie pojawia się w żadnej aktywnej przesłance w dowodzie.

- Reguła wprowadzania kwantyfikatora ogólnego (I$\forall$):

$$\frac{A(c)}{\forall x A(x)},$$

  gdzie c jest dobrą stałą oraz c nie może występować w dolnej formule (czyli zastępujęmy w $A(c)$ wszystkie wystąpienia zmiennej stałej c przez x.

- Reguła eliminacji kwantyfikatora ogólnego (E$\forall$):

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t)},$$

  gdzie t jest dowolnym termem. Reguła nie ma żadnych ograniczeń.

- Reguła wprowadzania kwantyfikatora egzystencjalnego (I$\exists$):

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)},$$

  gdzie t jest dowolnym termem. Przy czym nie musimy w dolnej formule zastępować wszystkich wystąpień termu t na zmienną x.

- Reguła eliminacji kwantyfikatora egzystencjalnego (E∃):

$$\begin{array}{l|ll} \multicolumn{2}{l}{\exists x A(x)} & \\ & A(c) & \text{H v} \\ \cline{2-2} & \vdots & \\ & C & \\ \multicolumn{2}{l}{C,} & \end{array}$$

  gdzie c jest nową stałą, wprowadzoną w hipotezie $A(c)$ i c nie występuje w formule C .

2 Przykłady dowodów

W Internecie można znaleźć trochę przykładów i omówień dowodów w naturalnej dedukcji. Sporo przykładów znajduje się np. na stronie:

`http://www.danielclemente.com/logica/dn.en.html`

Poniżej parę przykładów ilustrujących wykorzystanie reguł dla kwantyfikatorów. Podaję nazwy tylko dla części wykorzystanych reguł.

Jeśli piszę "z linii n" lub "z linii n, m" to oznacza, że reguła wykorzystuje wcześniejsze linie o tych numerach w dowodzie. Czasem piszę "z hipotezy n" żeby podkreślić, że w tym momencie wykorzystujemy hipotezę z linii n, i przestaje ona być aktywną.

1. $\exists x \forall y A(x, y) \to \forall y \exists x A(x, y)$.

1	$\quad \exists x \forall y A(x, y)$	H v
2	$\quad\quad \forall y A(c, y)$	H v
3	$\quad\quad A(c, d)$	
4	$\quad\quad \exists x A(x, d)$	
5	$\quad \exists x A(x, d)$	E∃ z hipotezy 2
6	$\quad \forall y \exists x A(x, y)$	I∀
7	$\exists x \forall y A(x, y) \to \forall y \exists x A(x, y)$	I→ z h. 1

W linii 5 mogliśmy wprowadzić kwantyfikator ogólny, bo d nie występowało w żadnej aktywnej hipotezie.

2. Dlaczego nie można udowdnić $\forall y \exists x A(x,y) \to \exists x \forall y A(x,y)$.

   Powyższa formuła nie jest tautologią, więc nie udowdnimy jej w żadnym systemie, który dowodzi tylko tautologii. Zobaczmy gdzie pojawi się problem w dowodzie w naturalnej dedukcji.

1	$\forall y \exists x A(x,y)$	H
2	$\exists x A(x,c)$	E$\forall$ z 1
3	$A(d,c)$	H v
4	$\forall y A(d,y)$	I$\forall$ z linii 3
5	$\forall y A(d,y)$	E$\exists$ z hipotezy 3
6	$\exists x \forall y A(x,y)$	I$\exists$ z linii 5.

   Na końcu notki znajduje się informacja, gdzie w powyższym dowodzie znajduje się błąd.

3. $\forall x \forall y A(x,y) \to \forall x A(x,x)$.

1	$\forall x \forall y A(x,y)$	H v
2	$\forall y \forall x A(c,y)$	E$\forall$ z linii 1
3	$A(c,c)$	E$\forall$ z linii 2
4	$\forall x A(x,x)$	I$\forall$ z linii 3
5	$\forall x \forall y A(x,y) \to \forall x A(x,x)$	I$\to$ z hipotezy 1.

   Zauważmy, że w regule E$\forall$ nic nie przeszkadza nam wprowadzić dwa razy tą samą stałą, z czego powyżej skorzystaliśmy.

4. Przykład na to, że czasem nie chcemy zastępować każdego termu przez

zmienną w regule I$\exists$: $\exists x A(x, x) \to \exists x \exists y A(x, y)$.

1	$\exists x A(x, x)$	H v
2	$A(c, c)$	H v
3	$\exists y A(c, y)$	I$\exists$ z linii 2
4	$\exists x \exists y A(x, y)$	I$\exists$ z linii 3
5	$\exists x \exists y A(x, y)$	E$\exists$ z hipotezy 2
6	$\exists x A(x, x) \to \exists x \exists y A(x, y)$	I$\to$ z h. 1

Wyjaśnienie do "dowodu" z punktu 2. Błąd w "dowodzie" w punkcie 2 znajduje się w linii 4. Nie możemy wprowadzić kwantyfikatora ogólnego wykorzystując stałą d, gdyż stała ta wysępuje w aktywnej (jeszcze wtedy) hipotezie z linii 3.